Chapitre 5 : Antoine Augustin Cournot : *l'économie mathématique comme science*

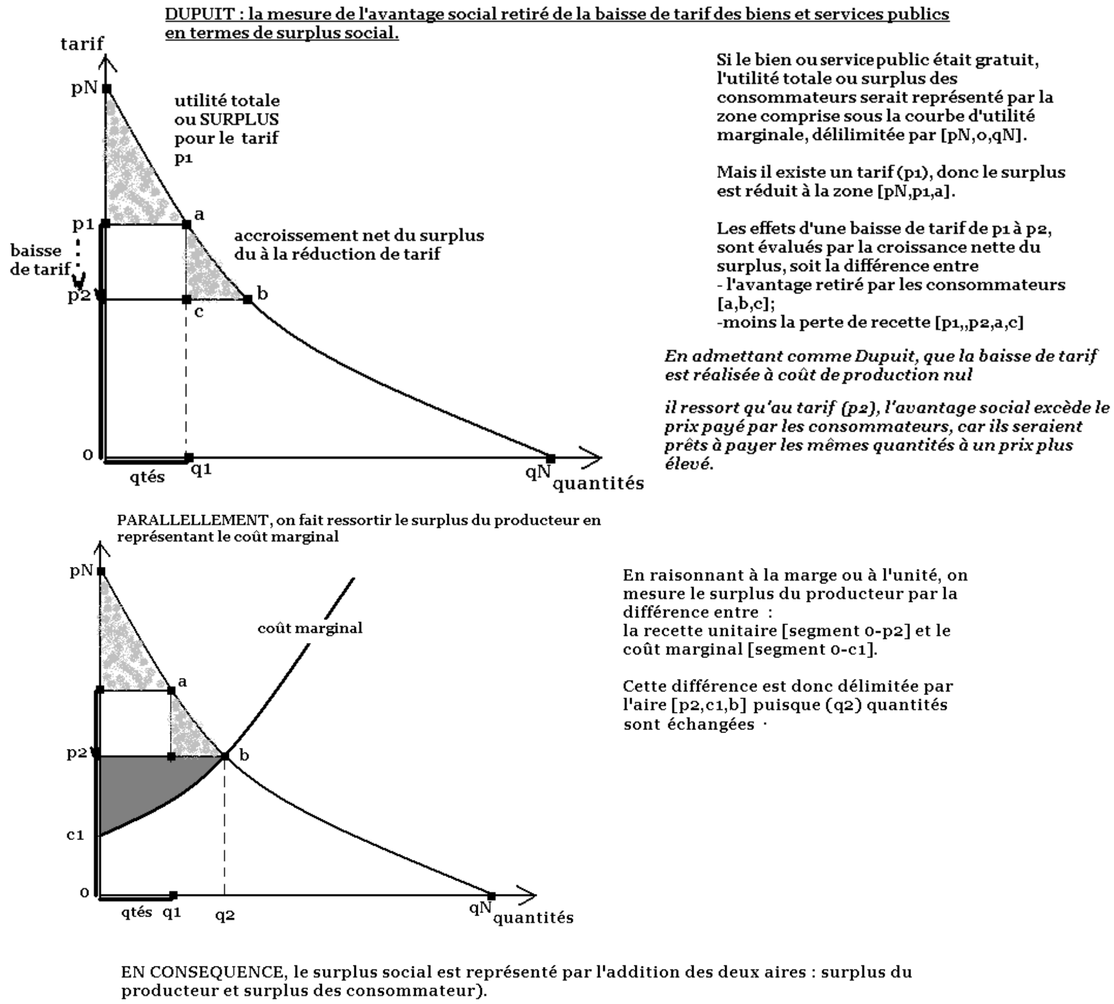
5.1) : Les précurseurs du Marginalisme : Von Thünen, H. Gossen, J.A Dupuit

La tentative d'élargissement du champ du calcul à la marge *(dérivation, intégration de fonctions continues)* apparaît avant 1870. Avant les précurseurs du Néo-classicisme, le mathématicien Bernoulli, le philosophe mathématicien Bentham, Godwin, mais aussi des auteurs importants dans les années 1830-50 comme **Lloyd, Longfield, Jennings**, recourraient, sans formalisation à la notion d'*utilité marginale.* Tandis que Ricardo et Malthus, avec la rente différentielle, raisonnaient, on le sait, sur *le « coût marginal »* des produits agricoles, sans l'énoncer ainsi.

C'est toutefois avec l'économiste **Von Thünen** (« L'Etat isolé » - 1824) que la précision sémantique commence, et que le calcul différentiel, pour résoudre le problème de la maximisation, devient opérationnel. Cet ouvrage énonce *la loi de l'égalité des prix des facteurs de production et de leurs produits marginaux*, c'est-à-dire pour prendre l'exemple du facteur travail, *le salaire est égal à la productivité marginale du travail.*
Dans son ouvrage de 1854, longtemps ignoré (*« Exposition des lois de l'échange »)*, **H. Gossen,** formule la loi de l'égalité des utilités marginales pondérées par les prix, dans une analyse du comportement du consommateur.

L'ingénieur économiste français, **Jules Dupuit (1804-1866)** dans ses nombreux travaux (mémoires, articles etc..) applique ses capacités analytiques considérables à l'élaboration, dans le cadre de la théorie de l'utilité, des fondements de la demande et des rapports entre l'utilité et la mesure du bien-être associé aux travaux publics. Dupuit est le premier à développer en économie la théorie de l'utilité marginale (allant au-delà de la « demande » telle que la présente Cournot –voir 5.2), une variante de tarification au coût marginal, la théorie du monopole simple et discriminant, et la théorie de la localisation et des prix. Il est aussi le créateur de la théorie du surplus, qu'Alfred Marshall intégrera ensuite à la loi de l'offre et de la demande, et que Maurice Allais forgera plus tard en théorie autonome et alternative à l'équilibre général de Walras-Debreu (« Théorie générale des surplus », 1981).

Dupuit publie (après Cournot) entre 1844 et 1853 plusieurs articles sur les avantages sociaux des biens et services publics : eau potable, routes, canaux et ponts, s'inscrivant ainsi dans la tradition de l'Ecole des Ponts et Chaussées dont il fut diplômé. On rappelle ci-dessous sa méthode d'analyse des avantages, basé sur le concept de surplus dont la mesure est l'utilité « nette » (ou « utilité relative »).
Elle est basée sur la distinction entre *l'utilité totale* et *l'utilité marginale* retirée de la consommation d'un service ou d'un bien public, compte tenu d'un *tarif donné.* Dupuit représente la fonction *décroissante de l'utilité marginale* (qui est une expression de la demande) d'une part, et ignorant la courbe d'offre, la fonction *croissante de coût marginal* (qui est une expression de l'offre).
Le graph de la décroissance de l'utilité marginale est le suivant :



Fort de ces représentations, Dupuit analyse alors *la hausse des tarifs (passage de p2 à p1)*, comme une perte sociale nette (puisque diminue l'avantage social retiré par les consommateurs) .
Cette analyse souffre cependant d'insuffisances connues. La plus importante est que l'auteur ignore qu'il raisonne à l'aide d'une *mesure* ***cardinale*** *de l'utilité*, laquelle suppose des hypothèses particulières et n'autorise que des évaluations primaires. On la retrouve dans de semblable études, généralement menées sur le secteur du *chemin de fer*, partout où celui-ci se développait (en Angleterre, et aux USA).

C'est néanmoins dans la lignée de Dupuit que **Maurice Allais** s'opposera dans sa *« Théorie générale des surplus »*, 1981, à la rénovation de la théorie de l'équilibre général de Walras, entreprise par son ancien disciple G. Debreu et son collègue J.K Arrow (*« Théorie de la valeur »* de Debreu en 1959). M. Allais, né en 1911 était polytechnicien et Ingénieur, Professeur à l'Ecole des Mines et prix Nobel en 1988, a bénéficié de plusieurs influences dans ses travaux (Dupuit et Pareto, mais aussi Edgeworth, Walras, et Fisher). Soucieux d'expérimentation comme Dupuit, il remet en cause le *formalisme mathématique* de la rénovation de l'équilibre général. Il oppose aux hypothèses de « continuité, dérivabilité et convexité », nécessaires pour la détermination d'un équilibre général, un *« concept de surplus* (distribuable) *convenablement élaboré »*. Sa définition de l'équilibre général, différente de celle de Walras, est alors : *« il y a équilibre lorsque n'existe plus aucune possibilité d'échanges qui apparaissent avantageux aux opérateurs concernés, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a plus aucun surplus susceptible d'être réalisé »* (définition de type parétien).

5.2) Le marginalisme d'Antoine Augustin Cournot (1801-1877)

<u>I) La pensée et l'œuvre de Cournot</u>

Selon notre introduction, Cournot appartient à l'époque des précurseurs. Il fut en fait un fondateur du marginalisme.

<u>**La place accordée à Cournot est en effet plus importante.**</u> Outre son marginalisme et ses découvertes théoriques, **A.A Cournot** se préoccupe de la dimension épistémologique en Sciences sociales, en devenant un opposant au *« positivisme » de Comte* (mais aussi à l'Ecole Historique Allemande). Son cas est donc exemplaire et démontre que l'intérêt technique de connaissance ne va pas fatalement de pair avec l'affirmation du *monisme positiviste.* La philosophie conduit selon lui à *« soumettre à une épreuve critique la valeur des idées maîtresse de notre entendement »* (Cournot, cité par H. Denis). Ces idées ne seront pas diminuées, elles seront simplement devenues *« **probables** ».* Cournot assume sur ce point l'héritage de Kant. Ce qui le conduit à séparer *connaissance rationnelle d'un* côté, et de l'autre *morale et religion*. Tel est le cas de l'Economie, car selon Cournot *les activités* économiques sont dégagées de la morale et de la religion, dans la mesure où elles sont soumises à *« la loi (probabiliste) des grands nombres »* (raisonnement sur la moyenne). Cette loi efface toute morale dans chaque activité individuelle considérée isolément.

Toutefois l'antipositivisme « comtien » ne garantit pas de dérives épistémologiques, conduisant au même résultat. C'est peut-être le cas de Cournot. Il déduit en effet de sa conception de l'évolution des sociétés que *« s'établit un ordre de faits sociaux qui tend à relever, omisso medio, des principes ou des idées purement rationnelles(...) »* de sorte que *« cela nous ramène à une sorte de mécanique ou de physique des sociétés humaines, gouvernée par la méthode, la logique et le calcul »*. (Cournot, cité par H. Denis)[C10]. Le kantisme critique de Cournot, semble alors se muer en une *conception leibnizienne de l'ordre social*, considérée comme une mécanique auto ajustable et parfaite. Dans le langage de Castoriadis, cela revient à concevoir la société comme un *« automate identitaire »,* pour lequel *« être »* signifie être *déterminé* et *prédéterminé.* Alors que pour une société, *« être »*veut dire *signifier,* ou *être lié à la signification.*

Kantien ou Leibnizien, Cournot adhère quoiqu'il en soit aux *principales idées du libéralisme*. L'économie de marché est selon lui dotée d'une efficacité supérieure ; les inégalités et la misère jouent parfaitement le rôle de frein à la croissance démographique au sens de Malthus ; il serait nuisible à la liberté de s'engager dans la voie du socialisme, qui est régi par un *« principe de fatalité économique ».*

Cournot peut être considéré comme ***l'inventeur de l'Economie Mathématique***. Cette branche de l'Economie adopte une méthodologie spécifique, celle des *fonctions mathématiques continues et dérivables,* donc le *calcul infinitésimal,* dans le but de démontrer l'existence d'un équilibre des échanges sur le marché, équilibre <u>**en quantités**</u> chez Cournot. Toutefois, l'économie mathématique de Cournot, n'est pas encore celle des comportements individuels, guidés par le <u>**postulat de rationalité**</u>. S'agissant de la *fonction de demande, ou de « débit »* chez lui, soit D=*f*(p), elle n'est pas caractérisée à l'aide » des concepts *à venir*, mais qu'il trouve inopérants tels que : *utilité, rareté, satisfaction.* Les coutumes, la distribution des revenus, permettent de mieux caractériser la demande.

La biographie de Cournot permet de situer ses rencontres avec la mathématique et l'économie mathématique. C'est le mathématicien Laplace, qui développe en lui un engouement pour les mathématiques, tandis qu'il a 19 ans et étudie la philosophie et le droit. Il deviendra en 1823, diplômé de Mathématiques à la Sorbonne. Il est alors très influencé par les travaux de Laplace, Lagrange et Hachette, ancien disciple du Mathématicien Condorcet.

C'est avec Hachette qu'il s'initie à la *Mathématique sociale.* Il était par ailleurs très ami avec le Mathématicien Lejeune-Dirichelet. Au cours de sa vie Professionnelle, il fut constamment soutenu et aidé part le Mathématicien Poisson. La tentative de Mathématisation en Science sociale qu'il entreprend, n'aurait à ses dires, qu'un seul antécédent, celui des travaux de Canard. Dans la Préface à ses *«Principes de la Théorie des Richesses* (une version littéraire des « *Recherches* » -voir ci-après-), il présente son projet scientifique comme *une « révolution »* (voir l'extrait dans le Doc de cours N° 5.1.), et son œuvre comme *« une œuvre d'analyse critique ».*

Les œuvres majeures de Cournot sont :

1838 : *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses*, qui est considéré comme la naissance de toute l'Economie Mathématique, à l'exception de l'anglais W. Whewell, disciple de Ricardo, qui dès 1829 publiait *« A mathematical exposition of some doctrines of political economy »*

1841 *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal*

1843 *Exposition de la théorie des chances et des probabilités*

1863 *Principes de la Théorie des Richesses* (version littéraire des « Recherches »)

1861 *Traité de l'enchaînement des idées fondamentales dans les sciences et dans l'histoire*

II) Le marginalisme de Cournot : 1838 : *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses*

On peut appeler *marginalisme de Cournot*, l'ensemble des thèses soutenues dans ses *« Recherches… »* de 1838. C'est sans doute à cause du mathématicien français **J. Bertrand,** qui soutint en 1877, que Cournot s'était trompé dans son chapitre VII des « Recherche », consacré à l'*oligopole*, que Cournot est resté *l'homme de l'oligopole* dit *« duopole de Cournot ».* En fait *les « Recherches »* comprennent 12 chapitres qui ont ni plus ni moins que fondé la nouvelle Ecole dite *marginaliste*. Nous pouvons le constater en passant brièvement en revue l'apport de chaque chapitre.

R. Dos Santos Ferreira souligne (dans le *« Dictionnaire des grandes œuvres économiques », op.cit)* l'importance de la Préface qui expose le *« programme de l'Economie mathématique »*. Là, Cournot explique qu'il s'agit non plus de raisonner sur les nombres, mais sur les fonctions. Les propriétés des fonctions qu'il entend utiliser sont : la continuité, la dérivabilité, et la monotonie dans le domaine de définition. L'avantage des Mathématiques selon Cournot est quadruple : la définition et l'analyse des problèmes économiques s'en trouve facilitées, elles ont aussi plus concises, plus facilement ouvertes vers de nouveaux développements, et non exposées au risque de l'argumentation vague.

Les trois premiers chapitres exposent, selon l'expression de Dos Santos Ferreira, *les piliers du paradigme néo-classique,* à une exception près, celle de la *valeur utilité dite* non mesurable par Cournot. La *richesse* est alors assimilée à la *valeur échangeable* (théorie classique). C'est donc plutôt le domaine des *prix* qui explique le parallèle. D'une part Cournot pose *la valeur comme une valeur relative*, adoptant ainsi nécessairement une *théorie de l'échange*, mais de plus il montre comment se réalise un *système de prix relatifs*. Il aborde ceci comme étant la question du *« change »*, et donc celui de l'échange de deux ou plusieurs marchandises entre elles. **On peut toujours dit-il passer de *n(n-1)/2combinaisons de valeurs relatives à un système cohérent de (n-1) prix relatifs*.** Le marché est donc *parfait* dans la mesure où les agents se réfèrent tous à un seul et même prix. Walras et Marshall adopteront cette démonstration.

On peut vérifier cette solution de Cournot à l'aide d'une matrice d'échange de rang 3, entre 3 marchandises « a, b et c ». Le tableau des échanges possibles s'écrit :

	a	b	c
a	aa	ab	ac
b	ba	bb	bc
c	ca	cb	cc

En excluant la diagonale, on a bien ***n(n-1)/2combinaisons de valeurs relatives*.** Soit 3(3-1)/2 = 6/2 = 3
puisque ab,ac,bc ⇔ ba,ca,cb. Le ***système cohérent de (n-1) prix relatifs, soit ici (3-1) = 2 prix relatifs,*** est alors obtenu en choisissant l'une des marchandises comme étalon. Si par exemple « a » est la marchandise étalon, le système de prix se résout à « ac » et « ab », lesquels donnent immédiatement « cb » et « bc ». Ce qui permet de dire que les agents se réfèrent tous au même système de prix.
Le chapitre III (*« Du change »*) est à cet égard célèbre. Nous lui consacrons ici le §3) plus bas.

C'est Cournot qui, dans son <u>Chapitre IV,</u> définit ce que l'on appellera *la loi de la demande*, ou chez lui *« du débit »*. La Fonction de demande pour un bien s'écrit : D = <u>F</u>(p) avec D, la demande annuelle, p, le prix moyen annuel, et F, une moyenne des fonctions de demande instantanées. Ce sont les propriétés de la fonction (F) qui expliquent la loi de la demande.
La fonction (F) est décroissante, continue, finie à gauche [F(0)] et à droite [F(p) = 0 pour p=prix plafond]. De ces propriétés il découle que *la* ***<u>dépense</u>*** *totale* [p.F(p)] admet un extremum dont Cournot fournit la solution avec les conditions des 1er *et 2nd ordre.*
Toute cette démonstration part du principe général suivant le quel *« chacun cherche à tirer de sa chose ou de son travail la plus grande valeur possible ».*
Le <u>Chapitre V</u> traite du Monopole. La méthode de maximisation de la recette totale (RT) du monopoleur [p.f(p)] est, en l'absence de coûts, celle de l'égalité du prix et de la recette marginale [**p=*R_m*]**. La dérivée de la RT donne la *R_m*, que l'on annule en déterminant le prix adéquat. Si on introduit la fonction de coûts [Φ(D)], la condition de maximisation s'écrit ***C_m = R_m***. Cournot applique ceci à différentes catégories de biens selon leur coût marginal ; il distingue ceux dont le C_m est croissant appelés *biens fonciers*, et ceux dont le C_m est décroissant ou en « U », soit les biens manufacturés.
Connaissant ces conditions il est possible d'étudier les effets exercés par l'introduction de la taxation sur les prix de monopole. C'est l'objet du <u>chapitre VI</u>, où plusieurs types de taxes sont introduites : *fixe* (par unité), *proportionnelle* au CA, *proportionnelle* à la production, et en nature. L'Etat, les consommateurs, et le Monopole tirent des avantages et subissent des désavantages, que le chapitre met en évidence.
Enfin vient le très célèbre <u>chapitre VII</u>, consacré au *duopole*, ou marché dominé par deux gros vendeurs. Le dossier de cours N° 5.1 comprend un encadré qui présente la méthode de maximisation du *profit* du duopole. On remarque *l'introduction des « fonctions de réaction » et le choix d'une solution définitive au problème* basée sur ces fonctions, qu'il suffit d'égaliser. On appelle alors *solution de Cournot,* au problème du duopole, le fait que *chacun maximisant sa propre fonction*, le marché donne un *prix* et *un profit* inférieurs au niveau qui aurait été celui de la solution alternative de *l'entente (ou coopération)*. Pour Cournot cette dernière solution est impossible *(fonctions de réaction oblige).* Notons que cette étude est étendue ensuite par Cournot à *n* concurrents producteurs d'un bien homogène.

<u>Un exercice type sur le duopole de Cournot</u> est par exemple le suivant :
Sur le marché d'un bien homogène X, deux offreurs A et B satisfont une demande de X, dont l'expression est : Pd = -2X + 200
Les fonctions de coût moyen respective des deux firmes sont :
CM_A = 40 et CM_B = 20
Il est demandé :

1) d'étudier les conséquences d'une première hypothèse : chaque firme ignore l'autre et se comporte en monopoleur ;
2) puis, en adoptant l'hypothèse de Cournot dite du duopole de double dépendance de calculer l'équilibre du marché. Donner les quantités qui seront offertes par chaque firme, et les profits alors réalisés ;
3) Enfin d'illustrer graphiquement à l'aide des *fonctions de réaction*, le cheminement vers l'équilibre.

Le chapitre VIII, aborde le même sujet, celui de l'équilibre, dans un environnement différent, et appelé la *« Concurrence indéfinie »*. On aura reconnu la concurrence *parfaite du marginalisme* ; C'est évidemment l'égalité des fonctions d'offre et de demande qui permet de déterminer le prix d'équilibre, suivant différents comportements des agents. Cournot introduit également la *taxation.*
Le chapitre IX est consacré à la concurrence de producteurs de *« substituts imparfaits »* (soit des matières premières différentes pour un même bien produit). Il recourt à l'hypothèse d'une *technologie à coefficient de production fixes et =1.* Walras reprendra ceci dans son équilibre général, puis on retiendra le nom de Léontieff pour parler de cette méthode. Contrairement au duopole, la solution de l'Entente n'est pas ici plus avantageuse.
Reste à Cournot à généraliser son approche, en l'élevant au niveau de l'Economie dans son ensemble. Ce qu'il réalise dans les chapitres XI et XII. L'auteur fait alors remarquer que *l' « hypothèse ceteris paribus »*, à la base de sa méthode pose problème dès lors qu'on considère les *interactions* entre marchés dans l'ensemble de l'économie. Ce faisant nous notons ainsi qu'il fournit à Marshall la dite hypothèse, et à Walras, le cadre de l'équilibre général. Le cadre seulement, car Cournot pense que les mathématiques sont à court pour atteindre un tel objectif comme celui de l'équilibre général. Il en fournit donc une simple approximation, sous les deux hypothèses de la concurrence indéfinie et du monopole.
Le chapitre XII est un élargissement de cet équilibre, de l'économie fermée, vers les échanges internationaux.

III) La science du change ou *comment Cournot élucide le « labyrinthe de Harris »*
Plan du Paragraphe III

1) La science du change : une définition
   a) La pratique
   b) La science
   c) De Harris à Cournot
2) Le modèle de Cournot : but, hypothèses et architecture
   a) Le but
   b) Les hypothèses du modèle
   c) L'architecture du modèle
3) Raisonnement 1 ou principal : la recherche des équations de change dans le cas d'un commerce libre sans frais de transport
   a) Le taux de change dans l'hypothèse de deux échangistes
   b) Généralisation et définition de l'équilibre : *la relation a)*
   c) La « relation a) » : Présentation algébrique et signification économique
   d) La « relation a) **»** : : illustration numérique et géométrique
   e) La relation *a)* : traduction en termes de *multiplicateur global* d'une variable résultant d'un cumul de facteurs.
4) Raisonnement 1 ou principal : Le système d'équations avec l'étalon place 1 et sa résolution
5) Raisonnement 2 : La recherche des équations de change dans le cas d'un commerce libre avec frais de transport, et dans le cas d'un commerce prohibé avec prime de contrebande
6) Conclusion du paragraphe III)

------

1) La science du change : une définition

Nous appelons *science du change* (pour reprendre une expression de Cournot), l'élaboration au moyen des mathématiques, des principes de détermination de la valeur comparée des devises internationales. On distinguera toujours à cet égard, la pratique des opérations de change, de leur théorisation ou *science du change*.
Si la pratique du change est ancienne (Moyen Age), la science du change a connu deux moments forts dans son développement : au 18e avec Joseph Harris *(« Essay upon money and coins » - 1757* – voir notre chapitre introductif N°8), puis au début du 19e avec Antoine Augustin Cournot *«Recherches sur les Principes mathématiques de la théorie des richesses »* - 1802), Chapitre III *« Du change » »*) .

a) La pratique

C'est au Moyen âge que sont nés les instruments de crédit modernes, ainsi que l'a montré l'historien belge, Raymond de Roover (1904-1972) : *« Le marché monétaire au Moyen Age et au début des temps modernes. Problèmes et méthodes.* » - Revue historique – Juil-Sept 1970). Le marché monétaire, celui du crédit à court terme, remonterait au XIIe siècle. Il s'est développé à Gênes, en relation avec le développement des foires de Champagne. A cette époque le terme *« banquier »* était synonyme de changeur ou cambiste (''menu change'' de monnaies). Le principal instrument n'était pas encore la lettre de change, mais son précurseur « *l'instrumentum ex causa cambii* » ou *cambium*, ou *contrat de change*. On sait que le but de l'échange par ces instruments, était de contourner l'interdiction du prêt à intérêt (*usure)* promulguée par l'Eglise.

b) La science

Les deux facteurs qui ont promu *la science du change* ont été historiquement :

- La libération, la diffusion et le perfectionnement des instruments de crédit (« *paper credit* », selon l'expression de Thornton), en relation avec le développement de la monnaie de banque

(*« bank money »*). La Lettre de change a joui à cet égard d'une préférence internationale. Les marchands et les financiers de l'Etat avaient besoin d'une parfaite connaissance des mécanismes du crédit.

- Les progrès de la mathématique, lesquels sont l'objet de ce paragraphe.

c) De Harris à Cournot

L'auteur qui est entré de plein pied dans l'explicitation des mécanismes du crédit international (la lettre de change en particulier), en définissant la notion d'endettement net (ou solde de balance des paiements), est Joseph Harris. Nous avons présenté son Essai (*« Essay upon money and coins » - 1757)* au chapitre introductif N° 8 du cours.
Harris a clarifié de manière exemplaire *le lien entre l'opération de crédit* (la Lettre de change) et son résultat *(la variation du cours du change)*. Le change n'est plus cet *« enfer terrible »* (le *« dreadfull evil »*) de Vanderlint. Mais, pour autant, Harris, mathématicien, astronome et gouverneur du Mint, n'expose aucune relation mathématique. L'univers des opérations de change est selon lui un *« immense labyrinthe »* ou un *« traffic by exchanges »*. Sa connaissance pratique véritable appartient aux *« dealers »*, et gît dans les arcanes du commerce lui-même. Mais disions-nous, pouvait-il aller plus loin dans la rigueur de la démonstration ? Notre réponse a été négative. Car les mathématiques qu'il maîtrisait alors, ne le lui aurait pas permis.
Par son *« labyrinthe »*, Harris a conféré au problème du change une réputation de complexité. Son exposé deviendra celui des classiques (Smith, Say, Ricardo), jusqu'à ce que Cournot décide de défaire le change de toute complexité. Son point de vue général est que les classiques *''bavardaient ou calculaient trop''* et ne dépassaient pas « l'*Arithmétique de banque* » (Il ne mentionne pas l'Essai de Harris, dont on peut supposer qu'il en avait la connaissance par l'intermédiaire de Smith). Il écrit :

« Il y a des auteurs, tels que Smith et Say, qui ont écrit sur l'économie politique en conservant à leur style tous les agréments de la forme purement littéraire ; mais il y en a d'autres, comme Ricardo, qui , abordant des questions plus abstraites ou recherchant une plus grande précision , n'ont pu éviter l'algèbre , et n'ont fait que la déguiser sous des calculs arithmétiques d'une prolixité fatigante . Quiconque connait la notation algébrique, lit d'un clin - d'oeil dans une équation le résultat auquel on parvient péniblement par des règles de fausse position, dans l'arithmétique de Banque. » (p. IX).

Nous y sommes. Selon la citation, le labyrinthe sera soluble, et sa complexité diminuée, à l'aide du calcul algébrique, et plus précisément de l'*algèbre linéaire*.
C'est précisément ce que ne pouvaient faire Harris, et ses successeurs classiques. La réalité du change international est en effet celle de l'interdépendance de multiples variables (les taux de change entre *n* devises ou places de change), donnant l'impression d'un labyrinthe. Mais, dit Cournot : *« l'emploi des signes mathématiques est chose naturelle toutes les fois qu'il s'agit de discuter des relations entre grandeurs »*. Dans le cas de taux de change interdépendants, ces relations dont parle Cournot, doivent cependant prendre directement la forme *d'un système d'équations linéaires* (ou *fonctions vectorielles)* . Or, vers 1757, lorsqu'écrit Harris, la mathématique entamait à peine l'étude des déterminants avec les travaux de : Cramer (1704-1752), Vandermonde (1735-1796), Laplace (1749-1827), Lagrange (1736-1813), Gauss (1777-1855) ou encore Cauchy (1789-1857). Cette étude est parvenue à un stade opérationnel à l'époque de Cournot. Ce dernier maîtrisait donc parfaitement l'algèbre linéaire, et son application géométrique vectorielle. Ce qui l'autorisera à élucider *le labyrinthe de Harris*, donnant ainsi à la science du change sa forme mathématique moderne (sur celle-ci voir notre Annexe 4 au chapitre premier, Partie I). On notera que la méthode de Cournot, se satisferait d'une présentation sous forme *matricielle*. Mais ce n'est que vers le milieu du 19^{e} siècle, que le *calcul matriciel* fut maîtrisé avec les travaux de James *Sylvester (1814-1897), influencé par*

son ami Arthur Cayley (1821-1895). Ensuite les travaux d'Eduard Weyr (1852-1903) permettront de lier les matrices aux fonctions vectorielles.
Le problème du change demeure avant tout un problème économique. De ce point de vue, une convergence mérite d'être mentionnée entre Harris et Cournot. Tous deux se refusent à faire de leur travail, un livre de recettes à l'usage du législateur. Ils estiment que dans un monde libre, et de libre-échange, ce sont les comportements des échangistes qui dictent la règle. Donc la science s'arrête là où des hypothèses doivent se substituer à cette réalité, par définition toujours incertaine. C'est la leçon de Harris aux « interventionnistes » (les ''*dévaluationnistes*'') de son époque, et celle de Cournot à Walras.

2) Le modèle de Cournot : but, hypothèses et architecture

a) Le but

Dans le Chapitre III) *« Du change »*, Cournot étudie le système monétaire pour montrer qu'il respecte *le principe de l'uniformité des mesures* et qu'il est donc régi par un ordre *« naturel »*. Il s'étonne à la fois du désordre ancien qui a pu régner en ce domaine, et de la réputation de complexité qu'il a acquise.
Son investigation, qu'il veut clarifiante, appartient à ce qu'il nomme *« la science du change »*.

b) Les hypothèses du modèle

- Un système de change fixe uni métalliste, qui relie toutes les monnaies à une quantité d'argent fin (Etalon argent)
  L'explication recherchée est celle du change réel (et non nominal). Le *change réel* est le *: « rapport entre les valeurs d'échange d'un même poids d'argent fin, selon qu'il est livrable en des lieux différents »*
  Ce que l'on peut illustrer par un exemple simplifié

	Pays 1	**Pays 2**	Si dette du Pays 2 = 5F à payer au pays 1 en £
Monnaie	1£ivre valeur =	1Florin valeur =	Calcul du change (1£/1F) = (30/27) = 1,11 donc 1£ = 1F × 1,11 = 1,11F
argent fin	30gr	27gr	remboursement = (5 × 1,11)£ = 5,55£

Nominal = 5F # Réel = 5,55£

Le remboursement n'est pas égal au change *nominal* (5F), mais au change réel (5,55£), car le même poids d'argent fin n'a pas la même valeur dans les 2 pays.

c) L'architecture du modèle

- Quatre raisonnements sont possibles
  - Commerce libre
    - cas de l'exemple ci-dessus sans frais de transport de l'argent. Le taux de 1,11 appliqué au Florin (ou la valeur 5,55£), suffit pour transférer l'argent vers le pays 1 (lettre de change ou virement bancaire). Cas appelé par nous, raisonnement 1 ou raisonnement principal.
    - Si les frais de transport de l'argent excèdent le taux réel, alors s'appliquent les frais de transport. On entre dans le raisonnement 2.
  - Commerce entravé (suite du raisonnement 2)
    - On retrouve les deux cas ci-dessus, le second pouvant être accru d'une *prime de contrebande*.

Les équations présentées ci-dessous sont celles du texte de Cournot, sans modification des symboles mathématiques (sauf précision contraire)

3) Raisonnement 1 ou principal : la recherche des équations de change dans le cas d'un commerce libre sans frais de transport.

a) Le taux de change dans l'hypothèse de deux échangistes

Soit $m_{1,2}$ l'endettement total annuel de la place 1 vis-à-vis de la place 2
$m_{2,1}$ l'endettement total annuel de la place 2 vis-à-vis de la place 1
Alors $c_{1,2} = m_{2,1} / m_{1,2}$ est le change de la place 1 à la place 2, soit *« la somme d'argent sur la place 2 en échange d'un poids exprimé par la place 1, et livrable en 1 »*. Dans notre exemple ci-dessus, ce taux s'écrirait :
$c_{F,£} = m_{£,F} / m_{F,£} = 30/27 = 1{,}11$, qui est donc aussi la mesure de la somme d'argent acheté par 1 £ivre dans le pays 2. Donc connaissant le montant total de l'achat (ou dette) $m_{2,1}$ / $m_{1,2}$, on peut écrire
$c_{1,2} = m_{2,1} // m_{1,2} \rightarrow c_{1,2} \times m_{1,2} = m_{2,1}$ qui donne la somme d'argent acheté par *m* £ivre dans le pays 2.
Soit dans notre exemple où $m_{F,£} = 5$
$c_{F,£} \times m_{F,£} = m_{£,F} \rightarrow 1{,}11 \times 5F = 5{,}55£$

Cournot en déduit :
- La symétrie des taux de changes : $c_{2,1} = 1/c_{1,2} = 1 /(m_{2,1} / m_{1,2}) = m_{1,2} / m_{2,1}$
- Le rôle du change : Le solde des dettes entre deux pays est réglé par simple jeu du change, sans circulation ou envoi d'argent fin. Ceci dans le cas d'un commerce libre sans frais de transport.

b) Généralisation et équilibre : *la relation a)*
Soit $m_{i,k}$ la dette totale annuelle de la place *i*, vis-à-vis de la place *k*
$c_{i,k} = m_{k,i} / m_{i,k}$ le taux de change de la place *i* à la place *k*
En supposant *r* places, les taux de changes multilatéraux forment pour nous, une matrice carrée *(i,k) d'ordre r.*

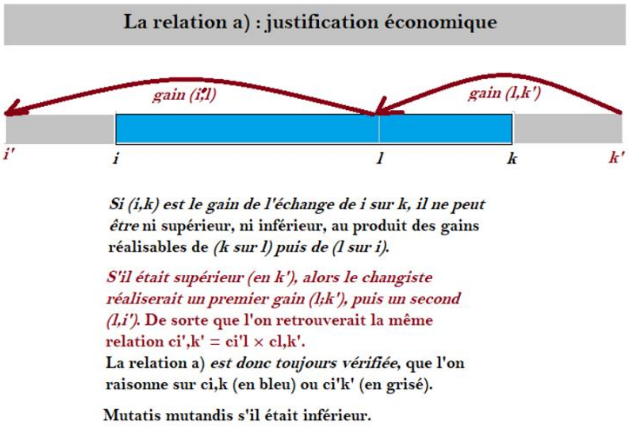
$$\begin{array}{c|cccccc} i/k & 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & r \\ \hline 1 & 1,1 & & & & & \\ 2 & & 2,2 & & & & \\ \cdots & & & \cdots & & & \\ i & & & & i,i & & \\ \cdots & & & & & \cdots & \\ r & & & & & & r,r \end{array}$$

Matrice qui comporte *r termes en diagonale et r² termes au total*. En excluant la diagonale (identité de la devise), le nombre de termes devient : $r^2 - r = r(r-1)$ qui est le nombre total de taux de change.
Mais les taux étant symétriques : $c_{i,k} = 1/ c_{k,i}$ alors le nombre total de taux est divisé par 2, soit
$= r(r-1)/2$
De plus, ces taux sont interdépendants, et gravitent (ou oscillent) autour d'un *équilibre*, défini par Cournot par la ***relation a).*** Cournot fait une présentation algébrique de la relation *a)* et suggère une signification géométrique. Il s'agit d'une relation fondamentale.

c) La **« relation a) »** : Présentation algébrique et signification économique

Si on considère trois places : *i, k et l* alors l'équilibre est défini par **la *relation a)***
$\mathbf{c_{i,k} = c_{i,l} \times c_{l,k}}$

Une première explication est économique.
A gauche de l'équation = somme sur la place *k* livrable en *i*
A droite : $c_{i,l}$ = somme sur la place *l* livrable en *i* et $c_{l,k}$ = somme sur la place *k* livrable en *l*
Il est donc impossible d'observer : $\mathbf{c_{i,k} > c_{i,l} \times c_{l,k}}$. Le schéma ci-dessous permet de le comprendre :



d) La **« relation a) »** : illustration numérique et géométrique

Bien qu'il ne donne pas le graphique, Cournot écrit :

> On peut représenter géométriquement la relation (*a*), en imaginant une série de points (*i*), (*k*), (*l*),.... tellement placés que la distance entre les deux points (*i*), (*k*) soit mesurée par le logarithme du nombre $c_{i,k}$. Au moyen de cette convention, la relation (*a*) exprime que les points (*i*), (*k*), (*l*), et en général tous les points de la série, en nombre égal à celui des places de change, doivent être situés sur une même ligne droite.

Une représentation nécessite de passer d'un espace à *r dimensions*, à un espace à 2 dimensions. Alors la relation *a)* signifie que chaque taux $c_{i,k}$ est une ***résultante vectorielle de deux autres taux.*** Selon nous, on peut interpréter la citation pour déduire abstraitement que la croissance du taux $c_{i,k}$, suit de place en place une progression géométrique.
Cournot veut ainsi dire que la relation *a), généralisée à r places* décrit la croissance du taux $c_{i,k}$. Cette croissance est à taux constant (TCAM) et peut s'écrire entre la place 0 et la place *r* :

$$\mathbf{(c_{i,k})_r = (c_{i,k})_0\ (1+TCAM)^r}$$

r désigne la $r^{ième}$ place atteinte partant de la place i, $_0$ la place d'origine de l'échange avec i, et τ le taux de croissance moyen de $c_{i,k}$. ***L'exposant* (r) est *la distance entre les taux successifs de 0 à r*.**
Cette croissance peut être linéarisée sous forme logarithmique : ln $(c_{i,k})_r = \rho.r + ln(c_{i,k})_0$ où ρ désigne le *taux de croissance instantané*, et *(r) la distance entre taux successifs*.

Un exemple : illustration numérique de la relation a)

Soit le tableau (fictif) des taux de change ($c_{i,k}$) ci-dessous. On suppose connus (col 1) les taux de change de la place *i*, avec toutes les autres places (de 1 à 5 ici, ou abstraitement de *k à r).*

places	col (1) taux connus $c_{i,k}$	col (2) taux 2 à 2 ou distance "r"	col (3) ln("r")
0 ou *i*	1		
1 ou *k*	1,023	1,023	0,022739487
2 *ou l*	1,03	1,00684262	0,006819315
3ou *m*	1	0,970873786	-0,029558802
4 ou	1,01	1,01	0,009950331
5 ou *r*	0,989	0,979207921	-0,021011278

La relation a) s'écrit : $\mathbf{c_{i,k} = c_{i,l} \times c_{l,k}}$. Les taux $c_{i,k}$ étant connus on peut donc en déduire la série des taux de change 2 à 2 (col 2), soit 1,023/1= 1,023 ; 1,03/1,023 = 1,0068… ; 1/1,023 = 0,9708… etc. … On appelle distance *r* par rapport au taux originel $c_{i,k}$, ces taux 2 à 2,.

On calcule dans la colonne 3 le logarithme de ces distances : ln(*r*).

La relation *a)* décrit une croissance du taux $c_{i,k}$, à taux constant, linéarisée sous la forme $\ln (c_{i,k})_r = \rho.r + ln(c_{i,k})_0$ avec *r*, la distance et ρ, le taux de croissance instantané. Calculons alors ce taux de croissance instantané. sa formule est : $\rho = ln\ (1 + TCAM)$ avec TCAM = MAM – 1 et MAM = $(\mu)^{1/n}$ avec $n = (r\text{-}k) = (5\text{-}1) = 4$. Soit MAM = $(\mu)^{1/4} = (0{,}989/1{,}023)^{1/4}$ = 0,991585493. On en déduit TCAM = 0 ,991585493 – 1 = -0,008414507. Ce taux étant très faible, on considère qu'il sera aussi le taux équivalent recherché, c'est-à-dire ρ.

La croissance linéarisée a donc pour équation : $\ln (c_{i,k})_r = (-0{,}008414507)\ r + 0{,}0227395$ (arrondi à 0,0227). Le taux originel étant $ln(c_{i,k})_0 = 0{,}0227$. Si cette équation est vraie, alors on devrait pouvoir vérifier, selon la citation,

que la distance entre les deux points (*i*), (*k*) soit mesurée par le logarithme du nombre $c_{i,k}$.

L'application de l'équation aux distances successives (colonne 3) , donne en effet les résultats ci-dessous :

$\ln (c_{i,k})_r = (-0{,}008414507).r + 0{,}0227395$				
place 5	**place 4**	**3**	**2**	**1 origine ou ci,k**
0,022261701	**0,022965752**	**0,022067335**	**0,022739487**	**0,022739487**

Les distances sont bien mesurées par le logarithme de $c_{i,k}$ = 0,022 (aux décimales près). Il s'agit bien d'une croissance à taux constant. Nous venons donc de vérifier numériquement la seconde proposition, à savoir qu' : en général tous les points de la série, en nombre égal à celui des places de change, doivent être situés sur une même ligne droite.

Reste à illustrer cette démonstration géométriquement, d'abord abstraitement, puis en l'appliquant à l'exemple numérique ci-dessus.

Le graphique intuitif

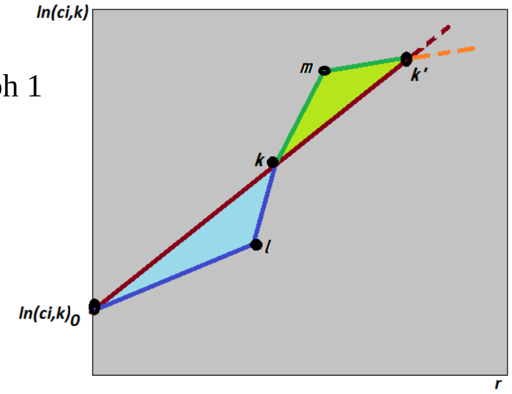
La représentation graphique appropriée est donc celle d'un graphique semi logarithmique d'ordonnée ln ($c_{i,k}$) et d'abscisse le temps *(t)* ou mieux la place ou distance *(r)* (Graph 1). Les oscillations, dues au *« cours du change »*, sont, ci-dessous, volontairement exagérées.

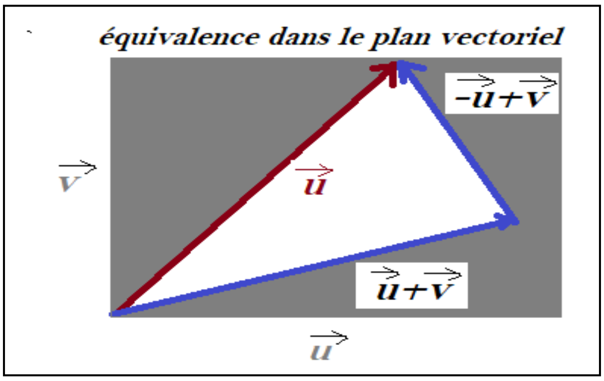
Lecture

La relation *a)* est illustrée par chacun des triangles successifs. Le taux $c_{i,k}$ au point *k* est le vecteur (la droite) résultant du produit $c_{i,l} \times c_{l,k}$ (ou somme vectorielle des deux sous-vecteurs en bleu).

Connaissant dans chaque triangle deux points (ou vecteurs), il est possible d'en déduire le troisième.

Graph 1

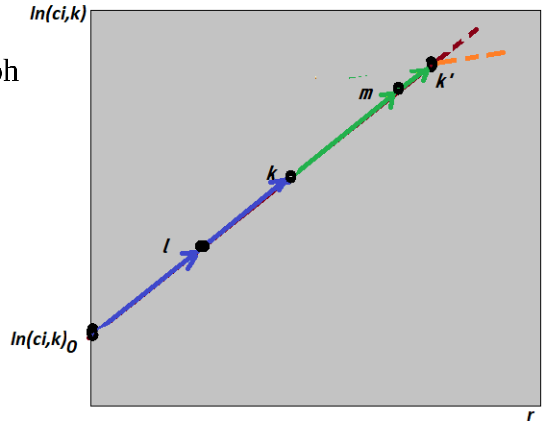




Toutefois, la phrase de Cournot fait état d'une *colinéarité*, c'est à dire: en général tous les points de la série, en nombre égal à celui des places de change, doivent être situés sur une même ligne droite.

Le graphique précédent deviendrait :

Graph



Lecture :

La colinéarité traduite par la droite suggère une croissance à taux constant, et donc que la *place i, soit l'étalon de mesure des taux de toutes les autres places.*

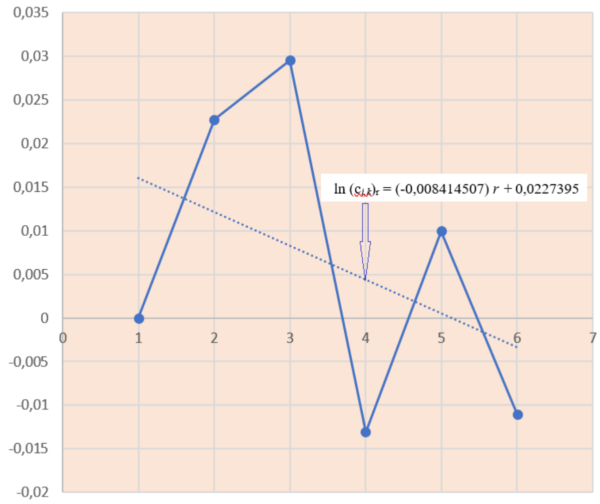
Cournot lie en quelque sorte les deux graphiques, en décrivant la colinéarité (graph 2) comme représentative de ***l'équilibre « autour duquel les variations du commerce font sans cesse osciller les valeurs d'échange » (graph 1).***

En termes matriciels il s'agirait simplement d'appliquer à la matrice (*i*,*k*) d'ordre *r*, le théorème de *Perron-Frobenius* (1907), lequel donne le ***vecteur propre*** de la matrice.

Le graphique appliqué à l'exemple

Cette représentation intuitive, et parfaite, est toujours dans la réalité un peu déformée. Dans le cas de notre exemple, qui fait état d'une décroissance (et non d'une croissance), le graphique semi logarithmique est le suivant :

$\ln(c_{i,k})$



e) La relation *a)* : traduction en termes de *multiplicateur global* d'une variable résultant d'un cumul de facteurs.

La relation *a)* : $c_{i,k} = c_{i,l} \times c_{l,k}$ peut être lue comme celle d'une variable $c_{i,k}$, définie par le produit de deux *facteurs* indépendants $c_{i,l}$ et $c_{l,k}$.
On sait, par définition, que $c_{i,k} = m_{k,i} / m_{i,k}$ est la somme d'argent achetée sur la place k, par une unité de monnaie *i*.
Il existe donc dans cette définition une valeur de départ en monnaie *k* ou ($m_{i,k}$) convertie en valeur d'arrivée en monnaie *i* ou ($m_{k,i}$) (voir notre exemple plus haut). Ce qui signifie que le quotient des deux, soit : (*valeur d'arrivée / valeur de départ)*, est un *multiplicateur global* (noté μ). Le taux de change est par conséquent un simple multiplicateur. Nous le dénommons *global* lorsqu'il est le résultat notamment d'un *cumul de facteurs* ($c_{i,l}$ et $c_{l,k}$). Ces facteurs étant eux-mêmes des multiplicateurs, puisqu'il s'agit de deux taux de change. Il suffit alors d'appliquer la règle suivant laquelle *le multiplicateur global est égal au produit des multiplicateurs successifs*.
La « relation *a* » devient : $\boldsymbol{{}_i\mu_k = {}_i\mu_l \times {}_l\mu_k}$
On retrouve aisément les deux propriétés du taux de change énoncées par Cournot :
- La réversibilité du multiplicateur : soit ${}_k\mu_i = 1 / {}_i\mu_k$
- L'interdépendance : ${}_i\mu_k = {}_i\mu_l \times {}_l\mu_k \Rightarrow {}_i\mu_l = {}_i\mu_k / {}_l\mu_k$ et ${}_l\mu_k = {}_i\mu_k / {}_i\mu_l$

En généralisant à *r places*, une présentation schématique serait :

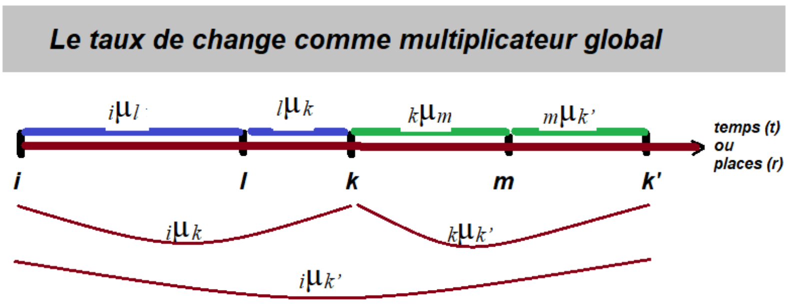


Schéma qui montre que sur *k' places, il existe un multiplicateur global* ${}_i\mu_{k'}$ égal au *produit* des *multiplicateurs successifs*. Ce qui revient à confirmer l'hypothèse de *colinéarité* de Cournot puisqu'alors tous les multiplicateurs sont supposés calculés sur la même valeur de départ (ou base), *la place i*, jusqu'à la $r^{ième}$ *place*. La place *i* devient *l'étalon de mesure.*

4) Raisonnement 1 ou principal : Le système d'équations avec l'étalon place 1 et sa résolution

Le système de *r équations* donne une égalité vérifiée par chaque place *k*, à l'équilibre (le long de la droite) avec la place 1 comme étalon. Cette égalité s'écrit :
Montant de l'endettement total de la place k, vis-à-vis des autres places = (Montant total de l'endettement des autres places vis-à-vis de la place k) × le taux de change ($c_{k,1}$)

$$(d)\begin{cases} m_{1.2}+m_{1.3}+\cdots\cdots+m_{1.r}=m_{2.1}c_{2.1}+ \\ \quad m_{3.1}c_{3.1}+\cdots\cdots+m_{r.1}c_{r.1}\ , \\ (m_{2.1}+m_{2.3}+\cdots\cdots+m_{2.r})c_{2.1}=m_{1.2}+ \\ \quad m_{3.2}c_{3.1}+\cdots\cdots+m_{r.2}c_{r.1}\ , \\ (m_{3.1}+m_{3.2}+\cdots\cdots+m_{3.r})c_{3.1}=m_{1.3}+ \\ \quad m_{2.3}c_{2.1}+\cdots\cdots+m_{r.3}c_{r.1}\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (m_{r.1}+m_{r.2}+\cdots\cdots+m_{r.r-1})c_{r.1}=m_{1.r}+ \\ \quad m_{2.r}c_{2.1}+\cdots\cdots m_{r-1.r}c_{r-1.1}\ . \end{cases}$$

Il y a donc *(r-1) taux*, mais *r* équations. La réduction nécessaire du système à *(r-1) équations*, est illustrée par Cournot sur l'exemple de 3 places.
Soit 3 places (1,2,3). Le système s'écrit :

$$\begin{aligned} m_{1.2}+m_{1.3}&=m_{2.1}c_{2.1}+m_{3.1}c_{3.1}\ , \\ (m_{2.1}+m_{2.3})c_{2.1}&=m_{1.2}+m_{3.2}c_{3.1}\ , \\ (m_{3.1}+m_{3.2})c_{3.1}&=m_{1.3}+m_{2.3}c_{2.1}\ . \end{aligned}$$

Les équations sont interdépendantes. On déduit le taux pour chaque place à l'aide de l'équation de définition du change qui veut que *quels que soient i et k, on a* $c_{i,k} = m_{k,i} / m_{i,k}$
Application
Place 2 : $(m_{2.1}+m_{2.3})c_{2.1}=m_{1.2}+m_{3.2}c_{3.1}$
En isolant $c_{2,1}$ et en remplaçant $c_{3,1}$ par sa valeur = $m_{1,3} / m_{3,1}$, l'équation devient

$$c_{2.1}=\frac{m_{1.2}+m_{3.2}c_{3.1}}{(m_{2.1}+m_{2.3})}=\frac{m_{1.2}+m_{3.2}(m_{1,3}/m_{3,1})}{(m_{2.1}+m_{2.3})}$$

En passant au dénominateur $m_{3,1}$ et en réalisant les opérations suffisantes pour conserver le rapport, l'équation finale est :

$$c_{2.1}=\frac{m_{3.1}m_{1.2}+m_{1.2}m_{3.2}+m_{1.3}m_{3.2}}{m_{2.1}m_{3.1}+m_{2.1}m_{3.2}+m_{3.1}m_{2.3}}$$

Il en est de même de la place 3. En remplaçant $c_{2,1}$ par ($m_{1,2}/m_{2,1}$) l'équation finale est

$$c_{3.1}=\frac{m_{2.1}m_{1.3}+m_{1.2}m_{2.3}+m_{1.3}m_{2.3}}{m_{2.1}m_{3.1}+m_{2.1}m_{3.2}+m_{3.1}m_{2.3}}$$

Ces deux équations donnent le change respectif des places 2 et 3 par rapport à la place 1. Il est donc possible de déduire le taux de change entre elles c'est-à-dire le taux $c_{3,2}$.

Ce taux défini comme multiplicateur global respectant la règle du cumul de facteur s'écrit :
${}_3\mu_2 = {}_3\mu_1 \times {}_1\mu_2$
On dispose de ${}_3\mu_1 = c3,1$
Par contre ${}_1\mu_2 = 1/{}_2\mu_1 = 1/c_{2,1}$
Donc ${}_3\mu_2 = {}_3\mu_1 \times (1/{}_1\mu_2)$ ou $c_{3,2} = c_{3,1} / c_{2,1}$ alors en retournant à l'équation de Cournot, on a bien :

$$c_{3,2} = \frac{m_{2,1}\, m_{1,3} + m_{1,2}\, m_{2,3} + m_{1,3}\, m_{2,3}}{m_{3,1}\, m_{1,2} + m_{1,2}\, m_{3,2} + m_{1,3}\, m_{3,2}}$$

La leçon est qu'il est donc possible de déterminer l'intégralité des taux de change dans un commerce multilatéral à *r places de change*.
Cournot fait remarquer que l'interdépendance des places conduit à *lisser le taux de change*. Les variations de ce dernier sont « *atténuées* » lorsque croissent les montants *m*.

5) Raisonnement 2 : La recherche des équations de change dans le cas d'un commerce libre avec frais de transport, et dans le cas d'un commerce prohibé avec prime de contrebande

La modification des hypothèses sur l'environnement commercial, ne modifient ni l'analyse, ni les équations précédentes, de manière significative.
Les deux nouvelles hypothèses (transport, et/ou prime de contrebande) ne font qu'assigner une **limite** au taux de change précédent. Celui-ci demeure le même jusqu'au seuil, soit du coût du transport, soit de la prime, soit des deux.
La formalisation présentée par Cournot peut être résumée de la manière suivante.
$c_{2,1}$ change de la place 2 à la place 1
$p_{2,1}$ coût du transport d'une unité de monnaie de la place 2 vers la place 1, y compris la prime de contrebande
suivant le raisonnement 1 on a toujours :
limite supérieure de $c_{2,1} = 1 + p_{2,1}$ et limite inférieure de $c_{2,1} = 1/(1+p_{2,1}) = \gamma_{2,1}$
Cournot entreprend alors l'écriture du système d'équation jusqu'à sa résolution par *réduction,* de la même manière que lors du raisonnement principal ci-dessus.
D'une manière générale, il déduit deux possibilités :

- $c_{i,k} > \gamma_{i,k}$ qui signifie que le règlement entre les places *i* et *k* sera réalisé au taux $c_{i,k}$ sans déplacement de métal précieux, puisqu'il est plus élevé que celui-ci. Aux places s'applique alors les égalités issues de la relation « a », dont $c_{i,k} = 1/c_{k,i}$. On retrouve le cas principal où le système est déterminé, ne comportant plus que *(r-1) équations et (r-1) inconnues*.

- $c_{i,k} < \gamma_{i,k}$ il y a alors transport d'argent et frais de transport. Il énonce la règle propre à cette hypothèse de la manière suivante :

  dans l'hypothèse actuelle, toutes les places qui font partie du système, importeront ou exporteront de l'argent, mais il n'y aura pas importation ou exportation entre toutes les places combinées deux à deux. Sur le nombre des combinaisons $\frac{r(r-1)}{2}$, il y en aura r-1 auxquelles correspondront des mouvements réels de fonds, et $\frac{(r-1)(r-2)}{2}$ auxquelles correspondront de simples virements de banque.

  Pour démontrer cette règle, il l'applique à une combinaison quelconque, celle de deux places 1 et 2. Le système de *r* équations précédent est alors modifié comme suit : il était par la relation *« a »*, réduit à *(r-1)* équations et *(r-1)* inconnues (voir supra). Maintenant, en se tournant vers les deux places 1 et 2. On constate que $\gamma_{2,1}$ (la limite) étant connue ou donnée (une constante), il s'ensuit qu'une inconnue disparaît. Et puisque par définition $c_{i,k} = 1/(1+p_{2,1}) = \gamma_{2,1}$, alors en substituant $\gamma_{2,1}$ à $c_{2,1}$, cette seconde inconnue disparaît également. Le système se voit ainsi réduit à *(r-2)* inconnues. Reste à prouver qu'il ne comporte plus que *(r-2)* équations. Il suffit de considérer que les deux places ne règlent plus par compensation du change leurs créances et dettes (c'est-à-dire $m_{2,1}$ = $c_{2,1} \times m_{1,2}$). Alors, il ne reste plus que *(r-2) équations.* Notre expression ci-dessus : *« il suffit de… »* est explicité par Cournot en disant :

> Il faut bien d'ailleurs qu'il en soit ainsi ; car autrement les sommes qui doivent s'écouler annuellement d'une place à l'autre, pour solder leurs créances et leurs dettes respectives, resteraient indéterminées,

On peut alors conclure, dans le raisonnement 2, avec frais de transport et prime de contrebande, que le système est également entièrement déterminé, et comporte *(r-2)* équations et *(r-2) inconnues.* On notera que les deux cas « commerce libre avec frais de transport » et « commerce entravé avec prime de contrebande » sont mathématiquement identique.

Enfin, Cournot parfait son modèle, au paragraphe 19, par les incidences du bimétallisme monétaire, sur les équations du change. La recherche devient celle des relations entre *le cours du change*, et *les prix relatifs comparés de l'or et de l'argent* entre deux places *i* et *k*. Une nouvelle variable est introduite : ρ_i, rapport du prix de l'or au prix de l'argent sur la place *i* . C'est le nombre de grammes d'argent que l'on donne pour un gramme d'or, sur la place *i*.
Symétriquement existe sur l'autre place la variable ρ_k. Soit alors h, une somme en espèces or transportée de *i* vers *k*.
Cournot montre que selon le rapport des deux prix de l'or, le *cours du change tend vers un équilibre*. Equilibre dû à la circulation de l'or, dont la rareté s'accentue d'un côté, et l'abondance augmente de l'autre, modifiant le rapport (ρ_k / ρ_i). La circulation de l'or ayant des conséquences, de part et d'autre, sur le prix de l'argent, le cours du change subit la variation des prix relatifs des deux métaux dans des limites données par les montants déplacés *(h*). Plus s'élèvent ces montants, plus faible est la variation du taux de change.
Sous l'hypothèse bi métalliste, Cournot énonce finalement la résolution du système d'équations de la manière suivante :

> Dans ce cas, il suffira de donner le prix de l'or sur une place et les coefficients du change, pour en déduire le prix de l'or sur toutes les autres places avec lesquelles la première a des rapports de banque. ,

puisque (ρ_k / ρ_i) = $c_{i,k}$

Et tout comme Harris, Cournot conclut à l'inefficacité de toute mesure légale de fixation d'un rapport entre le prix de l'or et celui de l'argent, car dit-il, les changeurs donneront simplement une préférence à l'un des métaux, tout en continuant leur arbitrage commercial.

Conclusion du paragraphe III)

Le « Labyrinthe » de Joseph Harris est bien résolu par Cournot. Il est possible de déterminer l'intégralité des taux de change dans un commerce multilatéral à *r places de change*, en choisissant l'une des places comme étalon.
La convergence des deux auteurs quant à l'imprévisibilité, ou l'incertitude du change demeure cependant. On remarque au moyen de notre illustration numérique (plus haut), qu'il est par exemple impossible de réaliser une **prévision** de $c_{i,k}$, en introduisant la place (*r+1*), laquelle figurerait tout aussi bien *le futur*. Bien que raisonnant à taux de croissance constant, il nous faudrait connaître *la distance* de *i* à *(r+1), c'est-à-dire ni plus ni moins que le taux futur !* Or, on ne peut pas prolonger la droite logarithmique de Cournot à (*r+1*), sans risques. Même le bon sens en la matière *« le taux sera demain ce) à peu près ce qu'il est aujourd'hui »* n'exclut pas les variations soudaines, tant elles résultent de multiples facteurs économiques (dont *le solde de la balance des paiements),* et non économiques. On savait fort bien cela dès le 18^e^ siècle (voire avant). Et les technologies actuelles de l'information, en réduisant l'incertitude ne l'ont pas supprimée, comme l'illustrent les séries chronologiques usuelles et caractéristiques, telle celle du change ''£ivre anglaise/Euro'' ci-dessous :

-€-

Conclusion générale sur Cournot

L'essentiel de la théorie néo-classique du *producteur et de l'équilibre partiel* vient des « *Recherches* » ; du fait de la différence sur la théorie de la valeur, il n'y a pas de théorie du consommateur chez Cournot. Longtemps éclipsée, l'œuvre de Cournot ressurgira avec R. Nash, en 1951. L'équilibre d'un *jeu non coopératif* auquel Nash aboutit, est une solution proche de celle de Cournot. Aussi a-t-on appelé cet équilibre « *Equilibre de Cournot-Nash* ». L'influence de Cournot ira alors grandissante, dans certaines reformulations de l'équilibre « néo-walrassien », et surtout dans le développement de la théorie de *l'organisation industrielle.*

Solution de l'exercice

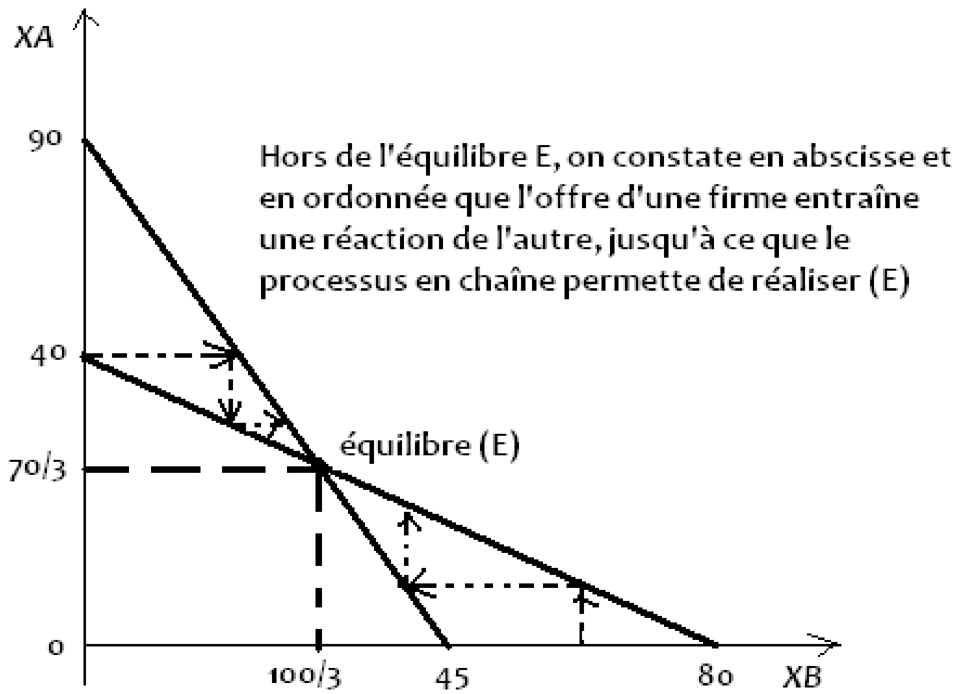
1) Hypothèse du monopole : Chaque firme maximise son profit en ignorant l'autre. La fonction générale de profit est : π = RT – CT = recette totale – coût total = (p.X) – (CM.X). Soit pour chaque firme :
   $\Pi_A = RT_A - CT_A = (p.X_A) - (CM_A.X_A) = (200\text{-}2X_A)X_A - 40X_A$. Le profit de A est maximum lorsque sa dérivée est nulle, soit : $d\,\Pi_A/dX_A = 0 \Leftrightarrow 200 - 4X_A - 40 = 0 \Longrightarrow X_A = 40$
   $\Pi_B = RT_B - CT_B = (p.X_B) - (CM_B.X_B) = (200\text{-}2X_B)X_B - 20X_B$. Le profit est maximum lorsque sa dérivée est nulle, soit : $d\,\Pi_B/dX_B = 0 \Leftrightarrow 200 - 4X_B - 20 = 0 \Longrightarrow X_B = 45$
   La production totale sera alors $X = X_A + X_B = 40 + 45 = 85$
   Le *prix unitaire de marché* est pour ces quantités : $p = 200 - (2\times85) = 200\text{-}170 = 30$
   Dans ce cas, la firme A réalise *une perte* puisque $\Pi_A = (40\times30) - (40\times40) = -400$,
   Tandis que la firme B encaisse un profit puisque $\Pi_B = (45\times30) - (45\times20) = 450$

2) Hypothèse de Cournot. On voit que chaque firme a intérêt à tenir compte de la *réaction* de sa concurrente pour élaborer sa stratégie, afin d'éviter le risque d'une perte.
   On modifie d'abord la demande, laquelle s'exprime en fonction de l'offre globale cette fois :
   $P_d = -2(X_A+X_B) + 200$
   Les fonctions respectives de profit Π_A et Π_B seront en conséquence modifiées, bien qu'il faille toujours les maximiser séparément, soit :
   $\Pi_A = [200-2(X_A+X_B)]X_A - 40X_A$. $\Pi_B = [200-2(X_A+X_B)]X_A - 20X_A$.

On annule les dérivées premières pour déterminer les quantités optimales pour chaque firme :
$d\,\Pi_A/dX_A = -4X_A -2X_B +200 -40 = 0 \Longrightarrow X_A = 40-(X_B/2)$
$d\,\Pi_B/dX_B = -4X_B -2X_A +200 -20 = 0 \Longrightarrow X_B = 45-(X_A/2)$
(On suppose réalisée la condition de maximisation du second ordre)
Les expressions **$X_A = 40-(X_B/2)$ et $X_B = 45-(X_A/2)$ forment les *fonctions de réaction*** de l'offre d'une firme étant donné l'offre de l'autre.
En résolvant le système formé par ces deux équations (par substitution), on obtient les quantités d'équilibre : $X_A = 70/3$ et $X_B = 100/3$ et donc la quantité optimale totale $X = 170/3$
Ces quantités seront offertes au prix de demande $p = 260/3$. Ce qui permet de déterminer le montant du profit de chaque firme, soit : $\Pi_A = 1088{,}88$ et $\Pi_B = 2422{,}22$

Le graphique des *courbes de réaction* permet de lire le cheminement vers l'équilibre ($X_A=70/3$; $X_B=100/3$).

Fonction de réaction et cheminement vers l'équilibre dans le cas du duopole de double dépendance de COURNOT



5.3) L'économie mathématique et le problème de la mesure de l'utilité

Si la découverte du principe de l'utilité marginale décroissante par les pères du marginalisme, marque bien le début d'une révolution mathématique en économie, elle n'en constitue pas moins l'inauguration d'un problème fondamental, immédiatement mathématique, et au-delà épistémologique : celui de la mesure du principal critère d'analyse : l'utilité.

Parmi les précurseurs certains s'en étaient défaits (Cournot), d'autres avaient pour la plupart adopté une conception implicite de l'utilité, celle de l'utilité cardinale ou mesurable (de Bernoulli à au surplus de Dupuit).

On sait que les trois fondateurs supposaient possible la définition d'un étalon de mesure de l'utilité, même si Walras (voir ci-après) avait réfléchi aux difficultés.

Le problème de la mesure de l'utilité se définit comme l'*impossible mesure de l'utilité totale attachée à un panier de biens composites,* et donc par *l'impossible comparaison des deux paniers de biens différents*.

Il résulte des difficultés de la mesure de l'utilité suivant plusieurs conventions successivement adoptées.

- La convention d'une *fonction d'utilité additive*, telle que l'adoptèrent les fondateurs (Menger, Walras, Jevons). Soit un tableau de classement des préférences entre 4 biens par un consommateur, au moyen d'un *nombre-indice* arbitraire, représentatif de l'utilité

T1 – Utilité ordinale : transformation *monotone*

biens	Utilité I	Utilité II	Utilité III,,
A	25	4	,,,,,,
Z	16	3	,,,,,,
E	9	2	,,,,,,
R	3	1	,,,,,,

On lit que si *l'ordre* ou *le classement est déterminant*, il importe peu de classer les biens suivant la colonne 1 ou la colonne 2, etc…. La fonction d'utilité est dite *ordinale* et « unique à une *transformation monotone près* ».

- La convention d'une fonction d'utilité *cardinale* et « unique à une *transformation linéaire près* ».

Dans ce cas la signification des nombres- indices est différente. La transformation doit conduire à une *invariance ou identité des indices,* à une constante multiplicative et additive près. Elle s'écrit sous la forme de la fonction linéaire : y = ax + b, où a et b sont des constante et « x » le nombre indice, ou utilité. Ce qui est illustré par le second tableau :

T2 – Utilité ordinale : transformations *linéaires*

biens	Utilité I	cste a	Utilité II	Utilité III,,
A	25	1,5	37,5	,,,,,,
Z	16	1,15	18,4	,,,,,,
E	9	1,23	11,07	,,,,,,
R	3	1,35	4,05	,,,,,,

On a supposé ci-dessus une constante multiplicative « a » qui conserve les préférences et « la mesure initiale » de l'utilité. Les indices successifs ne diffèrent donc que : suivant leur origine, et les unités arbitraires.

L'avantage de la seconde convention ressort immédiatement. La fonction d'utilité totale ainsi obtenue fournit des résultats sensés, lorsqu'on examine ses *variations premières et secondes.*
La dérivée première de la fonction classique U = *f*(x) est $U'_x \Leftrightarrow dU/dx$ = Utilité marginale du bien x,. Son signe indique si l'échelle est croissante ou décroissante.
La dérivée seconde $U''_x = d^2U/dx^2$ possède un signe >0 ou <0 qui permet de conclure à la croissance de l'utilité marginale ou à sa décroissance. Son signe indique donc l'intensité de la préférence.
Tout simplement parce que les indices sont liés entre eux par une transformation linéaire, telle celle qui lie la mesure de la température en d° centigrade et d° fahrenheit : F° = (9/5)°c +32°. La température ne différent pas selon la mesure, il est possible suivant l'une ou l'autre de dire si elle s'est accrue ou a diminué. On lit bien dans le tableau que : $U_A - U_Z = 2\times(U_Z - U_E)$

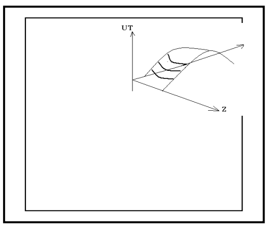
- Le problème demeure cependant. Il n'est pas possible de déterminer l'utilité totale d'un panier de biens composite (ici celui du panier : AZER) en *additionnant les utilités marginales* (c'est-à-dire les variations). Ou ce qui revient au même, on ne peut pas *intégrer les courbes d'utilité marginales* pour calculer l'utilité totale du panier.

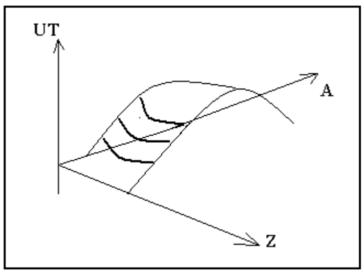
On suppose par exemple que le multiplicateur « a » égal 1 et « b = +4 » pour deux biens X et Y dont le niveau d'utilité initial est dans la première colonne ci-dessous :

biens	U 1	II	III	IV	V	utilité totale
X	4	8	12	16	20	4 +(3×4) = 16
Y	12	16	20	24	28	12 + (3×4) = 24
						40

On obtient une utilité totale du panier de 40, mais mesurée par un nombre indice qui n'a pas de sens.
Le fait que la variation ait un sens (3×4), ne supprime pas la différence inexpliquée à l'origine : 4#12.

- <u>Le problème apparaît donc clairement comme celui de la nécessité d'une mesure unique de l'utilité, semblable à la longueur, ou au poids, pour comparer les utilités</u>. Les deux conventions étudiées ci-dessus ont chacune leur limite.
    - Dans l'hypothèse « *ordinal* », pour reprendre l'expression de Blaug, si l'utilité est représentée par les courbes de niveau d'une montagne, on ne sait pas s'il s'agit du Mont Everest ou d'une simple butte. Le consommateur classe, à l'aide d'indices croissants sans qu'on puisse décider de la *hauteur* ;





    - Dans l'hypothèse « *cardinal* », il est possible de déterminer les valeurs des intervalles, mais on ignore l'origine et la pente.

Certes il existe une relation linéaire entre les indices, comme celle existant entre les deux types de mesure de la température. Mais elle ne supprime pas le double problème, comme l'illustre le cas de la relation F° = (9/5)°c +32°. Pour reprendre l'exemple de Blaug : je puis dire que la température a augmenté deux fois plus entre Dimanche et Lundi, qu'entre Lundi et

Mardi, mais je puis rien inférer quant à la différence de température entre samedi et Lundi, car selon que j'utilise l'échelle centigrade ou l'échelle fahrenheit la différence sera différente à cause du coefficient de proportionnalité (9/5), c'est-à-dire la pente. Quant à l'origine (ici 32°), elle est purement arbitraire.

- La théorie mathématique de l'utilité a donc progressé, mais à coup d'hypothèse sans cesse discutées.

Les premiers marginalistes, Walras en particulier, raisonnaient avec des fonctions d'utilité à un seul bien. L'utilité d'un bien est alors *supposé indépendante* de celle des autres biens, permettant la construction d'une échelle *cardinale de l'utilité*.
Par exemple, soit deux biens A et B, consommés en quantités Q_a et Q_b. Le consommateur attribue respectivement à chaque quantité, une utilité, sous la forme d'un nombre-indice, ou une *note*. Elle s'écrit pour la quantité Q_a ==> U_a (Q_a), et pour la quantité Q_b ==> U_b (Q_b).
Sous l'hypothèse d'une *utilité cardinale additive*, on peut déduire l'utilité totale d'un panier en quantités (Q_a,Q_b), notée $U_{(Qa,Qb)} = [U_a (Q_a) + U_b (Q_b)]$. Si la quantité Q_b est constante, alors l'utilité marginale du bien A s'écrit : $U_{ma} = \Delta Ua/\Delta Qa$. L'interprétation varie selon deux cas :
Si A est un bien non divisible et $\Delta Qa = 1$, alors la variation s'écrit :
$U_{ma} = U_a (Q_a + 1) - U_a (Q_a)$;
Si A est un bien divisible et la fonction U_a continue et monotone la variation s'écrit :

$$U_{ma} = \lim_{Qa \to 0} \frac{\Delta Ua}{\Delta Qa} = dUa/dQ_a,$$ c'est-à-dire la dérivée de la fonction U_a

Mais dès lors qu'on admet que l'utilité d'un bien peut dépendre des quantités consommées d'un autre bien (par exemple U_a de Q_b), on obtient alors une fonction d'utilité qui n'est *pas une transformation linéaire* de la première, si on choisit, dans un panier composé de plusieurs biens, une autre marchandise comme étalon. Ce problème a été exposé en 1892, par Irving Fisher.

Cette difficulté a été résolue par Edgeworth, par *l'introduction des courbes d'indifférence.*
Le consommateur est alors supposé attribuer une note globale à la fonction d'utilité
$U = f(Q_a,Q_b)$, laquelle devient une *fonction d'utilité généralisée*. Les Utilités marginales des deux biens sont cette fois les dérivées partielles de U par rapport à Q_a et Q_b, soit :
$U_{ma} = (\delta U/ \delta Q_a)$ et $U_{mb} = (\delta U/ \delta Q_b)$ ou en écriture différentielle $U_{ma} = U'_a \times dQ_a$ et
$U_{mb} = U'_b \times dQ_b$. La variation totale de l'utilité s'écrit alors : $dU = (U'_a \times dQ_a) + (U'_b \times dQ_b)$.
Lorsque la variation est nulle, soit dU=0, c'est que U est constante, et donc que l'on est sur une courbe d'indifférence d'un niveau donné. En modifiant la constante U, on peut alors écrire un système de courbes d'indifférences, appelé carte d'indifférence du consommateur. Chaque courbe identifie l'ensemble des paniers procurant au consommateur le même niveau de satisfaction. Comme il existe plusieurs niveaux, repérés par l'indice d'utilité, plus le consommateur s'élève, plus il retire de satisfaction de sa consommation.
On voit donc qu'il est encore admis de dire de « combien » s'est amélioré le niveau de satisfaction. Or, la démonstration de ce résultat demeure toujours impossible.
Finalement, c'est V. Pareto (cf plus loin) qui proposera d'abandonner toute référence à l'utilité cardinale. L'utilité (chez lui *« ophélimité »*) est une notion *ordinale*, qui suppose simplement que le consommateur *classe les paniers de biens par ordre de préférence*. La carte d'indifférence illustre cette *hiérarchie des préférences*. Par conséquent, c'est la fonction d'utilité elle-même qui devient une *fonction indice*.